

# Estimação Temporal da Deformação entre Objectos utilizando uma Metodologia Física

João Manuel R. S. Tavares<sup>1</sup>

Raquel R. Pinho<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Prof. Auxiliar, Dep. de Eng. Mecânica e Gestão Industrial, Fac. de Engenharia da Universidade do Porto, Investigador Sénior, Lab. de Óptica e Mecânica Experimental, Inst. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

<sup>2</sup>Aluna de Doutoramento, Fac. de Engenharia da Universidade do Porto, Investigadora, Lab. de Óptica e Mecânica Experimental, Inst. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial  
Rua Dr. Roberto Frias, s/n, 4200-465 Porto, PORTUGAL  
{tavares, rpinho}@fe.up.pt

**Resumo.** Neste artigo, é apresentada uma metodologia para estimar a deformação faseada entre dois objectos atendendo às suas propriedades físicas. A referida metodologia, pode ser utilizada por exemplo, em aplicações de Visão Computacional ou de Computação Gráfica, e consiste em modelar fisicamente os objectos em causa, por intermédio do Método dos Elementos Finitos, seguidamente estabelecer a correspondência entre alguns dos seus dados, por intermédio de Emparelhamento Modal, e finalmente, determinar o campo de deslocamentos, ou seja as formas intermédias, através da resolução temporal da Equação Dinâmica de Equilíbrio de Lagrange. Como em muitas das possíveis aplicações da metodologia a apresentar, é necessário quantificar a deformação existente, assim como estimar apenas a componente não rígida da deformação global envolvida, serão também apresentadas as soluções adoptadas para satisfazer tais propósitos.

**Palavras-Chave:** Análise Modal, Computação Gráfica, Equação Dinâmica de Equilíbrio, Energia de Deformação, Método dos Elementos Finitos, *Morphing*, Objectos Deformáveis, Visão Computacional.

(Recebido para publicação em 03 de janeiro de 2005 e aprovado em 28 de março de 2005)

## Temporal Estimation of the Deformation between Objects by a Physical Methodology

**Abstract.** In this paper, is presented a methodology to estimate the deformation involved between two objects attending to its physical properties. The methodology referred can be used, for example, in Computational Vision or Computer Graphics applications, and consists in physically modeling the objects, by means of the Finite Elements Method, establishing correspondences between some of its data points, by using Modal Matching, and finally, determining the displacement field, that is the intermediate shapes, through the resolution of the Lagrange's Dynamic Equilibrium Equation. As in many of the possible applications of the methodology to present, it is necessary to quantify the existing deformation, as well as to estimate only the non rigid component of the involved global deformation, the solutions adopted to satisfy such intentions will be also presented.

**Key words:** Modal Analysis, Computer Graphics, Dynamic Equilibrium Equation, Deformation Energy, Finite Elements Method, *Morphing*, Deformable Objects, Computational Vision.

### 1. Introdução

Apesar de se verificar um vasto trabalho na área da simulação da transformação existente entre dois objectos – usualmente designada por *Morphing*, nem sempre a deformação estimada é obtida de forma coerente com as propriedades físicas dos objectos e com

as cargas (forças) envolvidas. De forma a responder adequadamente a estes requisitos, a metodologia a usar deverá considerar a modelação física de cada objecto a deformar.

A metodologia a apresentar neste artigo tem em conta tal pressuposto, e surge na sequência de trabalhos previamente realizados: Na consideração do elemento

finito proposto por Sclaroff, [1-3], para modelar fisicamente os objectos em causa por intermédio do Método dos Elementos Finitos, [3, 4]; Na utilização de Emparelhamento Modal, de forma a obter as correspondências entre os dados pontuais (nodos) dos objectos em causa, proposto por Shapiro, [3, 5, 6]; Na estimativa da transformação existente entre dois objectos, segundo princípios físicos, e com a determinação analítica dos modos de vibração dos modelos, proposta por Nastar, [7-11]; No estudo realizado por Tavares sobre o emparelhamento, a análise de movimento e da deformação de objectos sintéticos e reais usando o elemento finito proposto por Sclaroff e o Emparelhamento Modal de Shapiro, [3, 12-15].

Assim, na metodologia a apresentar, [16, 17], considera-se que são determinadas as correspondências entre os nodos dos objectos em causa, por intermédio de Emparelhamento Modal, e construídas as matrizes de massa e rigidez de cada objecto, usando o Método dos Elementos Finitos, nomeadamente por intermédio do elemento finito de Sclaroff.

Com a modelação física considerada nesta abordagem, os modelos obtidos são preenchidos por um determinado material e, desta forma, comportam-se de forma equivalente aos objectos reais; permitindo assim, estimar o alinhamento temporal entre os mesmos de acordo com as suas propriedades físicas.

Para obter a transformação temporal existente entre dois objectos, ou seja a deformação faseada, previamente modelados e emparelhados, é nesta abordagem resolvida computacionalmente a Equação Dinâmica de Equilíbrio de Lagrange, [4, 16]. Assim, a referida equação é integrada no tempo até que sejam satisfeitas certas condições de paragem especificadas pelo utilizador.

Contudo, uma vez que se pressupõe a não existência de informação adicional acerca dos objectos, nem sobre a deformação existente, para resolver a Equação Dinâmica de Equilíbrio é necessário estimar de forma adequada o vector de cargas implícitas, assim como os vectores iniciais de deslocamento e de velocidade. As soluções adoptadas nesta abordagem, para estimar tais variáveis, são também apresentadas neste artigo.

Em muitos casos, não existe emparelhamento entre todos os nodos dos objectos a considerar: os objectos são constituídos por um número diferente de dados, a metodologia de emparelhamento considerada não obtém correspondências fiáveis para todos os nodos, etc. De forma a ultrapassar este problema, foi desenvolvido um procedimento para determinar as cargas implícitas nos nodos não emparelhados. Este procedimento permite obter resultados satisfatórios, mesmo nos casos referidos, e é também descrito neste artigo.

A quantificação da deformação existente entre os objectos considerados, quer ao nível global quer ao

nível local, é na abordagem adoptada obtida através da consideração dos valores da energia de deformação elástica, [3, 4, 16].

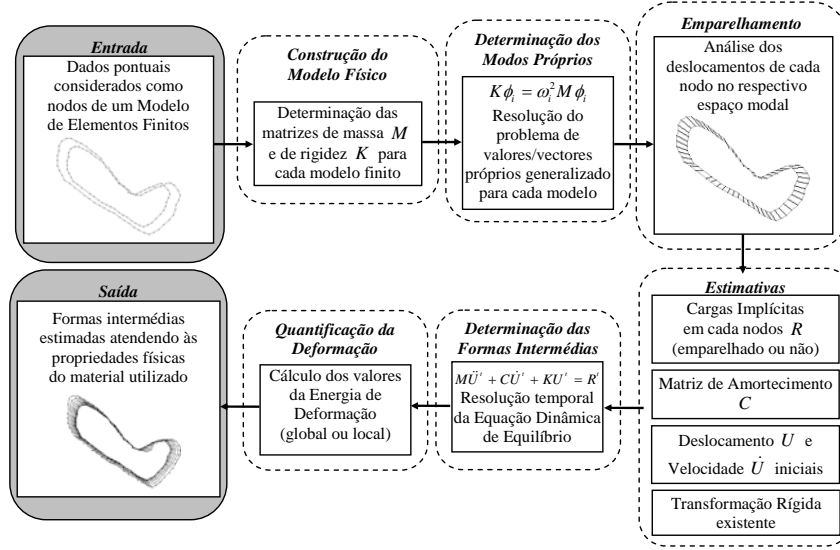
Uma solução que possibilita a estimativa da componente não rígida da transformação global existente entre dois objectos, passa por: estimar a transformação rígida existente (global), ou seja a translação, a rotação e o escalonamento; aplicar a transformação rígida estimada ao primeiro objecto; obter a transformação faseada entre o primeiro objecto rigidamente transformado e o segundo objecto; desta forma, a estimativa obtida refere-se unicamente à componente local da deformação global envolvida. Esta solução foi considerada nesta abordagem, sendo a estimativa da transformação rígida existente obtida pelo método proposto por Horn, [3, 18].

Utilizando uma implementação desenvolvida para a abordagem descrita neste artigo, [3, 15, 16], é possível representar as formas intermédias estimadas, pela resolução da Equação Dinâmica de Equilíbrio, usando não só o tradicional nível de cinzento constante para cada nodo do modelo considerando, mas também considerar níveis proporcionais às cargas implícitas estimadas ou aos valores da energia de deformação elástica. Desta forma, o utilizador pode visualmente identificar quais as zonas do modelo mais sujeitas à influência das cargas e as mais deformadas. Com a mesma comodidade, o utilizador pode determinar a transformação rígida existente, e obter apenas a estimativa da componente não rígida da deformação existente.

Na Figura 1, está representado um esquema da abordagem global considerada neste trabalho.

Este artigo está organizado do seguinte modo: Seguidamente, é realizada uma breve descrição do elemento finito isoparamétrico de Sclaroff, usado para modelar fisicamente cada objecto; Posteriormente, é apresentado o Emparelhamento Modal, considerado no estabelecimento das correspondências entre os nodos de dois modelos; No ponto seguinte, é descrito o método de integração considerado na resolução computacional da Equação Dinâmica de Equilíbrio; Após esta descrição, segue-se a apresentação das soluções encontradas para estimar os vectores iniciais de deslocamento e de velocidade, assim como o vector de cargas implícitas, necessários para resolver a Equação Dinâmica de Equilíbrio; A descrição do processo de quantificação da deformação existente, através da energia de deformação elástica, constitui a secção seguinte; Nesta mesma secção, é também abordado o procedimento adoptado para estimar unicamente a componente não rígida da deformação existente entre dois objectos; Posteriormente, são apresentados alguns resultados experimentais obtidos usando a abordagem descrita; Por

último, são apresentadas algumas conclusões finais e enumeradas perspectivas de desenvolvimentos futuros.



**Figura 1:** Esquema da metodologia global adoptada neste trabalho

## 2. Elemento isoparamétrico de Sclaroff

Usando o método de Galerkin, [3, 4, 19], para discretizar um dado objecto real, pode-se obter um sistema de funções – usualmente designadas por funções de forma, que relacionam o deslocamento de um determinado ponto do objecto modelado com o respectivo deslocamento dos restantes nodos do mesmo. Neste trabalho, tal é conseguido pela utilização do elemento finito proposto por Sclaroff, [1-3].

Para construir um modelo físico para um determinado objecto usando o referido elemento, começa-se por construir uma matriz de proximidade,  $G$ , que traduz as distâncias entre os  $m$  nodos (dados pontuais) do mesmo objecto:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(X_1) & \cdots & g_1(X_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(X_1) & \cdots & g_m(X_m) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

usando funções Gaussianas:

$$g_i(X) = e^{-\|X - X_i\|^2 / (2\sigma^2)}, \quad (2)$$

onde  $X_i$  é o centro do objecto e  $\sigma$  é o desvio padrão que controla a interacção entre os nodos. Como esta matriz  $G$ , é então possível obter a matriz de interpolação  $H$ , que para um objecto 2D tem a forma:

$$H = \begin{bmatrix} h_1(X) & \cdots & h_m(X) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_1(X) & \cdots & h_m(X) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

sendo os seus elementos, ou seja as funções de forma:

$$h_i(X) = \sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X), \quad (4)$$

onde  $a_{ik}$  são coeficientes tais que  $h_i(X)$  assumam valores não-nulos apenas no nodo  $i$  e que constituem a matriz  $A$  determinada por inversão da matriz  $G$ .

Após a obtenção da matriz de interpolação  $H$ , a construção das matrizes de massa,  $M$ , e rigidez,  $K$ , seguem os procedimentos usuais do Método dos Elementos Finitos, [1-4, 19].

Neste trabalho, tornou-se essencial, para o bom funcionamento da abordagem adoptada, a consideração da matriz de amortecimento,  $C$ , pois sem amortecimento, as formas estimadas não se aproximavam adequadamente para o objecto final. Assim, optou-se por considerar a matriz  $C$  como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$C = \hat{\alpha}M + \hat{\beta}K, \quad (5)$$

onde  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  são as constantes de massa e rigidez do amortecimento proporcional, determinadas em função das fracções de amortecimento crítico, [4, 20].

## 3. Emparelhamento Modal

O estabelecimento das correspondências entre os  $m$  e  $n$  nodos dos modelos de elementos finitos inicial,  $t$ , e final,  $t+1$ , é nesta abordagem obtido através da consideração do Emparelhamento Modal. Assim, começa-se por resolver o problema de valores próprios generalizado de cada modelo:

$$K\Phi = M\Phi\Omega, \quad (6)$$

onde, para um modelo bidimensional com  $m$  nodos:

$$\Phi = [\phi_1 \mid \dots \mid \phi_{2m}] = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \\ v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} \text{ e } \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{2m}^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

sendo que o vector de forma do modo  $i$ ,  $\phi_i$ , descreve o deslocamento  $(u, v)$  para cada nodo devido a esse modo de vibração, e a matriz diagonal  $\Omega$  é constituída pelos quadrados das frequências de vibração ordenados de forma crescente.

Seguidamente, construídas as matrizes modais  $\Phi_t$  e  $\Phi_{t+1}$ , para os modelos  $t$  e  $t+1$ , as correspondências obtém-se por comparação dos deslocamentos de cada nodo no respectivo espaço modal. Assim, é construída uma matriz de afinidade,  $Z$ , cujos elementos são, para casos bidimensionais:

$$Z_{ij} = \|u_{1,i} - u_{2,j}\|^2 + \|v_{1,i} - v_{2,j}\|^2. \quad (8)$$

Desta forma, a afinidade entre os nodos  $i$  e  $j$  será nula se o emparelhamento for perfeito e aumentará à medida que o emparelhamento piora, [3]. Na construção desta matriz, é normal desprezar os modos de mais alta ordem, essencialmente associados a ruído, [3, 13].

A procura na matriz  $Z$  dos melhores emparelhamentos, pode ser realizada nesta abordagem por dois processos distintos:

1) Usando uma busca local, [3, 13, 14]; isto é, para cada nodo procura-se o melhor candidato possível, dado pelo valor mínimo da respectiva linha, e o emparelhamento só é considerado válido se para o nodo candidato também é o melhor emparelhamento, dado pelo valor mínimo da coluna associada ao candidato. Este procedimento, tem a vantagem de obter apenas emparelhamentos com elevado grau de afinidade. No entanto, não considera a estrutura global do modelo em causa, pois cada nodo é considerado como um elemento independente dos restantes.

2) Usando técnicas de optimização, de forma a obter globalmente os melhores emparelhamentos possíveis para todos os nodos do objecto, [21, 22]. Este procedimento, tem a vantagem de obter emparelhamentos em muito maior número, e de já considerar a estrutura global do objecto. No entanto, por vezes, alguns dos emparelhamentos obtidos não são os mais adequados.

Nos resultados apresentados neste artigo, todos os emparelhamentos considerados foram obtidos usando o procedimento de busca local. Tal foi considerado, pois o objectivo principal deste artigo é a obtenção da estimativa faseada para a deformação existente entre dois objectos. Logicamente que este problema será mais

complexo, quanto menor o número de emparelhamentos considerado.

#### 4. Equação Dinâmica de Equilíbrio

Como já referido, nesta abordagem, a estimativa para deformação faseada segundo princípios físicos é obtida através da integração temporal da Equação Dinâmica de Equilíbrio:

$$M\ddot{U}^t + C\dot{U}^t + KU^t = R^t, \quad (9)$$

onde  $U$  é o vector de deslocamentos nodais que alinham nodos emparelhados. A componente deste vector relativa ao nodo  $i$  tem a forma:

$$U_i = X_{2,i} - X_{1,i}, \quad (10)$$

com  $X_{1,i}$  a representar o  $i$ -ésimo nodo do modelo inicial, e  $X_{2,i}$  o do modelo final com o qual foi emparelhado.

Para resolver computacionalmente a Equação Dinâmica de Equilíbrio, podem ser utilizados vários métodos de integração, [4, 16]. Neste artigo, considera-se o método da Sobreposição de Modos usado em conjunto com o Método de Newmark.

##### 4.1. Sobreposição de Modos

Este método de integração, possibilita que na resolução da Equação Dinâmica de Equilíbrio apenas sejam utilizados nos cálculos alguns dos modos de vibração do modelo em causa, [4]. A referida medida, reduz o custo computacional associado ao processo de integração, uma vez que, sem afectar em demasia os resultados obtidos, pois são essencialmente desprezadas as componentes locais da transformação geralmente associadas a ruído, diminui-se as dimensões das matrizes e dos vectores envolvidos. Deste modo, o processamento é acelerado, sem considerável perda de informação, o que poderá ser útil em aplicações em que o tempo de computação é restringido.

O método da Sobreposição de Modos, considera a transformação de coordenadas generalizada,  $\Phi$ , para transformar os deslocamentos modais,  $X$ , nos nodais,  $U$ , e vice-versa:

$$U(t) = \Phi X(t), \quad (11)$$

de forma obter as equações dinâmicas de equilíbrio desacopladas e segundo os deslocamentos modais generalizados:

$$\ddot{X}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{X}(t) + \Omega^2 X(t) = \Phi^T R(t), \quad (12)$$

onde  $\ddot{X}$  e  $\dot{X}$  são a segunda e primeira derivada temporal do vector de deslocamentos modais, já que:

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \text{ e } \Phi^T M \Phi = I, \quad (13)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade.

De forma a resolver a equação (12), pode ser considerado o método de Newmark. O referido método, considera as seguintes aproximações:

$$\begin{cases} \dot{X}^{t+\Delta t} = \dot{X}^t + [(1-\delta)\ddot{X}^t + \delta\ddot{X}^{t+\Delta t}]\Delta t \\ X^{t+\Delta t} = X^t + \dot{X}^t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{X}^t + \alpha\ddot{X}^{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \end{cases} \quad (14)$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros a determinar de maneira a que os resultados obtidos sejam satisfatórios e estáveis, [4]. Considerando a substituição da equação (14), na Equação Dinâmica de Equilíbrio dada pelo método da Sobreposição de Modos, equação (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}I + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\Phi^T C \Phi + \Omega^2\right)X^{t+\Delta t} = \\ &R^t + \left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}I + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\Phi^T C \Phi\right)\dot{X}^t \\ &+ \left(\frac{1}{\alpha\Delta t}I - \left(1-\frac{\delta}{\alpha}\right)\Phi^T C \Phi\right)\ddot{X}^t \\ &+ \left(\frac{1-2\alpha}{2\alpha}I - \left[(1-\delta)\Delta t - \frac{1-2\alpha}{2\alpha}\Delta t\delta\right]\Phi^T C \Phi\right)\ddot{X}^t \end{aligned} \quad (15)$$

Este método de integração é incondicionalmente estável para  $2\alpha \geq \delta \geq 0.5$ , [20]. Contudo, convém salientar que se  $\delta = 0.5$  então, independente do valor de  $\alpha$ , este método não possui amortecimento numérico. Por outro lado, se  $\delta > 0.5$ , então é introduzido amortecimento artificial e obtém-se valores menos exactos, uma vez que os resultados obtidos têm precisão de primeira ordem. Já quando:

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (16)$$

e  $\delta > 0.5$ , então é maximizada a dissipação de alta frequência, [20]. Na prática, verificou-se que em alguns casos experimentais a redução da precisão, resultante da consideração de valores  $\delta > 0.5$ , originou a divergência dos resultados obtidos.

## 4.2. Estimativas

Nesta secção, descreve-se as soluções adoptadas para a resolução de alguns problemas, essencialmente relacionados com a falta de informação sobre os objectos em causa, assim como sobre a deformação envolvida.

Assim, serão apresentadas as soluções encontradas para estimar os vectores iniciais de deslocamento e de velocidade, e também o vector de cargas implícitas sobre os nodos do modelo inicial, quer estejam emparelhados ou não.

### 4.2.1. Deslocamento e velocidade iniciais

O método de integração utilizado no âmbito deste trabalho requer, para o arranque do processo resolutivo,

os vectores iniciais de deslocamento e de velocidade. A solução encontrada, nesta abordagem, para estimar o vector inicial de deslocamento consiste em considerá-lo proporcional ao deslocamento total envolvido. Deste modo, o vector de deslocamento inicial é dado por:

$$X_i^0 = c_X (X_{2,i} - X_{1,i}), \quad (17)$$

onde  $X_i^0$  representa a  $i$ -ésima componente do vector inicial de deslocamento modal, e  $c_X$  é uma constante a especificar, função da aplicação em causa.

De modo análogo, o vector inicial da velocidade modal é calculado em função do deslocamento modal inicial:

$$\dot{X}^0(i) = c_V X^0(i), \quad (18)$$

onde  $c_V$  é outra constante a definir, função da aplicação.

De salientar que neste trabalho, obedecendo a uma necessidade de comodidade da especificação dos parâmetros de entrada por parte do utilizador da implementação desenvolvida para a metodologia adoptada, considerou-se  $c_X$  e  $c_V$  iguais para todos os nodos.

Na prática, verificou-se que quanto maiores os valores de  $c_X$  e de  $c_V$ , maiores serão os desfasamentos entre iterações sucessivas. Tal, origina a aproximação mais rápida ao objecto final.

### 4.2.2. Cargas implícitas

As cargas implícitas nos nodos emparelhados com êxito, foram consideradas como proporcionais ao deslocamento total envolvido:

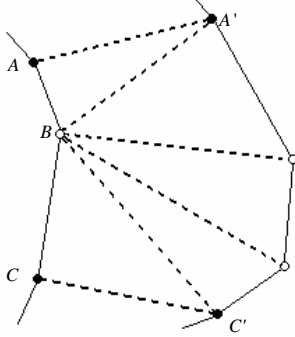
$$R_i = k(X_{2,i} - X_{j,i}), \quad (19)$$

onde  $R_i$  representa a  $i$ -ésima componente do vector de cargas no nodo emparelhado  $i$ ,  $X_{2,i}$  as respectivas coordenadas no objecto final,  $X_{j,i}$  as coordenadas respectivas na forma associada à etapa  $j$  da deformação, e  $k$  é uma constante global de rigidez. Neste trabalho, mais uma vez obedecendo ao critério de comodidade referido, considerou-se esta constante igual para todas as componentes do vector  $R$ .

O problema associado aos nodos do modelo inicial que não foram devidamente emparelhados, consiste em não serem conhecidas as respectivas coordenadas no modelo final. A solução encontrada para este problema foi a seguinte, Figura 2: para cada nodo não emparelhado  $B$ , compreendido entre dois nodos  $A$  e  $C$ , respectivamente emparelhados com os nodos  $A'$  e  $C'$  do modelo final, a componente do vector de cargas  $R_B$  referente a este nodo  $B$  é dada por:

$$R_B = k \left( \sum_{\substack{B' \text{ todos os} \\ \text{nodos} \\ \text{entre } A' \text{ e } C'}} \left[ \frac{D_{tot} - D_{B'}}{D_{tot}} (X_{2,B'} - X_{1,B}) \right] \right), \quad (20)$$

onde  $D_{tot}$  representa a soma das distâncias de todos os nodos que influenciam o nodo  $B$ , e  $D_{B'}$  representa a distância do mesmo nodo  $B$  a um nodo não emparelhado compreendido entre os nodos  $A'$  e  $C'$ .



**Figura 2:** Estimação das cargas nos nodos não emparelhados

Analisando a fórmula do vector inicial de deslocamento, equação (17), verifica-se que as componentes dos nodos não emparelhados também não estão definidas. A solução encontrada, foi especificar o vector inicial de deslocamento em função do vector inicial de cargas:

$$\begin{cases} X_i^0 = \frac{c_x}{k} R_i & \text{se } k \neq 0 \\ X_i^0 = 0 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Note-se que desta forma, a menos que  $k$  seja nulo, o vector inicial de deslocamento modal dos nodos emparelhados com êxito, é idêntico ao que foi previamente estipulado pela equação (17).

Resumindo, com a solução adoptada, para cada nodo do modelo inicial não emparelhado, o respectivo deslocamento modal inicial vai ser influenciado, tal como a carga implícita no mesmo nodo, pelos nodos do modelo final que estão compreendidos entre os nodos emparelhados com os vizinhos do nodo em causa. O peso atribuído a cada nodo do modelo final, no vector de deslocamento inicial, é igual ao atribuído na determinação da respectiva carga implícita. Note-se que esta solução se baseia no princípio de vizinhança: nodos vizinhos no modelo inicial devem manter-se como tal ao longo da deformação.

## 5. Quantificação e componente não rígida

Uma vez que a metodologia utilizada nesta abordagem se baseia em princípios físicos, é possível calcular a energia de deformação elástica em cada instante do

processo resolutivo da Equação Dinâmica de Equilíbrio. Os valores desta energia são usados neste trabalho para quantificar a deformação existente, quer ao nível global quer ao nível local.

Como já foi previamente referido, a implementação desenvolvida para a abordagem adoptada também permite a obtenção da estimativa relativa às componentes locais da deformação global existente entre dois objectos; isto é, não considerar a transformação rígida global na estimativa da deformação existente.

Nesta secção, é então descrito o procedimento para calcular a energia de deformação elástica, e também a abordagem usada para desprezar a componente rígida da deformação.

### 5.1. Energia de deformação

A energia de deformação elástica,  $E$ , pode ser calculada como, [3, 4, 13, 14]:

$$E = U^T K U. \quad (22)$$

Assim, se:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

a equação (22) da energia de deformação elástica pode ser reescrita como:

$$E = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j. \quad (24)$$

Isto é, a energia de deformação elástica global é dada pelo somatório das suas componentes locais. Pelo que, a energia de deformação local,  $e_i$ , associada ao nodo  $i$ , é:

$$e_i = u_i \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j. \quad (25)$$

Com este procedimento, uma vez obtidas as formas intermédias dos objectos responsáveis pela deformação global existente, isto é o campo de deslocamentos, pode-se quantificar a deformação associada a cada uma destas formas usando os valores da energia de deformação elástica envolvida.

Na implementação desenvolvida, os valores da energia de deformação elástica podem também ser usados na representação das formas intermédias estimadas, possibilitando assim ao utilizador uma visualização da quantificação da deformação existente.

### 5.2. Componente não rígida

Como existem várias aplicações possíveis da metodologia desenvolvida, que só têm interesse na

estimativa da componente local da deformação global existente entre dois objectos, foi considerada uma solução que permite desprezar a componente rígida envolvida.

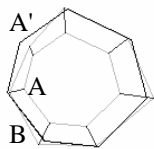
A solução adoptada é constituída pelas seguintes fases:

1) Estando os dois objectos com alguns dos seus nodos devidamente emparelhados, é estimada a transformação rígida existente entre os mesmos. O método utilizado foi o proposto por Horn, [3, 18], e permite estimar a rotação, a translação e o escalonamento existente entre os dois objectos emparelhados.

2) A transformação rígida estimada é aplicada ao primeiro objecto. Assim, o primeiro objecto fica rigidamente alinhado com o segundo.

3) A metodologia desenvolvida para estimar as formas intermédias entre dois objectos é aplicada entre o primeiro objecto rigidamente transformando e o segundo objecto. Deste modo, as formas estimadas pela metodologia apresentada, estimam unicamente a componente não rígida, ou seja as componentes locais, da deformação global existente entre os dois objectos.

Nas Figuras 3 e 4 é apresentado um exemplo de estimação das componentes locais pela metodologia desenvolvida.



**Figura 3:** Contornos A e B emparelhados, e A' resultado da aplicação da transformação rígida estimada a A



**Figura. 4:** Estimativa da componente não rígida da deformação entre A e B

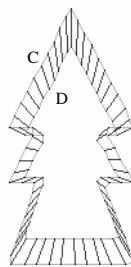
## 6. Resultados experimentais

A metodologia desenvolvida, foi integrada numa plataforma genérica de desenvolvimento e ensaio, de algoritmos de processamento e análise de imagem e de computação gráfica, previamente desenvolvida, [3, 15]). Com a referida plataforma, o utilizador pode facilmente e comodamente especificar todos os parâmetros da metodologia, assim como controlar a sua execução e verificar e analisar os resultados obtidos.

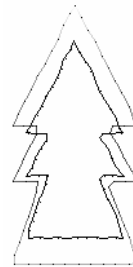
Nesta secção são apresentados alguns dos resultados experimentais obtidos pela utilização da metodologia proposta neste artigo. (Apenas consideramos objectos do tipo contorno, uma vez que, ao desprezar os pontos do interior dos mesmos, o custo computacional é reduzido sem perda relevante de informação. Todas as imagens apresentadas nesta secção, incluem os nodos dos objectos iniciais e finais com os seus dados não

ligados entre si. Já as formas intermédias estimadas, estão representadas com os seus pontos unidos por segmentos de recta, e segundo uma escala de cinzentos relacionada com a intensidade da carga implícita existente ou com o valor da energia de deformação associada. Neste caso, a valores mais reduzidos, de força ou de energia, correspondem níveis mais escuros e vice-versa.)

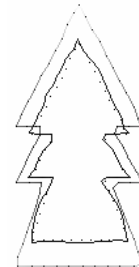
Como primeira experiência, considere-se os contornos C e D da Figura 5, ambos constituídos por 62 nodos todos emparelhados com êxito por Emparelhamento Modal. Nas Figuras 6 e 7, pode-se verificar dois resultados obtidos - neste caso, as formas estimadas estão representadas segundo os valores das cargas implícitas - e constatar, que através dos valores da constante global de rigidez,  $k$ , se pode controlar adequadamente a aproximação obtida ao objecto final. Nesta experiência, também constatamos que quanto maior a intensidade da força implícita considerada, através da consideração de um valor mais elevado para  $k$ , mais rápida será a convergência obtida. No entanto, os valores de  $k$  deverão estar sempre entre os limites adequados para o material considerado na modelação, pois caso contrário, os resultados podem divergir.



**Figura. 5:** Contornos C e D emparelhados



**Figura 6:** Formas inicial e final estimadas com  $k = 60$

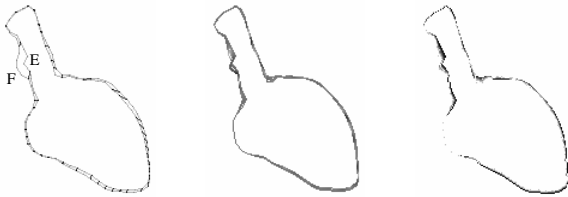


**Figura 7:** Formas inicial e final estimadas com  $k = 30$

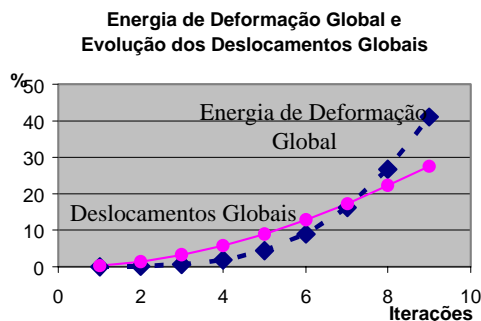
Para a segunda experiência, considere-se os contornos E e F da Figura 8, obtidos a partir de contornos reais de duas imagens do coração, [3], cada um composto por 70 nodos dos quais 43 emparelhados com êxito por Emparelhamento Modal. Utilizando um passo de tempo  $\Delta t = 1$ , uma constante de rigidez  $k = 1$ , valores de amortecimento crítico entre 0.5% e 3%, polietileno como material virtual, e como critério de paragem, do processo computacional, uma distância média da última forma estimada ao contorno final inferior a 60 *pixels*, foram necessárias 7 iterações cujas formas estão representadas nas Figuras 9 e 10, de acordo com os valores da energia de deformação local e global.

Em qualquer uma das Figuras 9 e 10, é possível verificar que a energia de deformação vai aumentando progressivamente, tal é devido ao facto do deslocamento

entre iterações também aumentar, Figura 11. Contudo, caso o processo resolutivo não fosse interrompido pelo critério de proximidade utilizado, o equilíbrio seria atingido com um número significativamente mais elevado de iterações. Tal originava deslocamentos cada vez mais reduzidos entre iterações e a implícita diminuição da energia de deformação.



**Figura 8:** Contornos E e F emparelhados **Figura 9:** Formas estimadas por valor da energia de deformação local **Figura 10:** Formas estimadas por valor da energia de deformação global

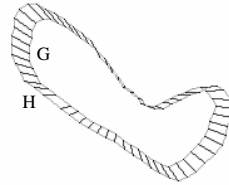


**Figura 11:** Evolução da energia de deformação global para o caso dos contornos E e F da Figura 8

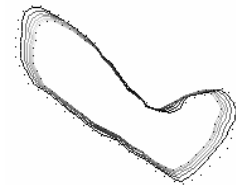
Para a terceira e última experiência, considere-se os contornos G e H, representados na Figura 12, obtidos a partir de imagens reais de pedobarografia dinâmica [3, 12, 21], cada um constituído por 61 nodos dos quais 59 emparelhados com êxito por Emparelhamento Modal. Com as mesmas condições de aplicação da experiência anterior, mas adoptando como critério de paragem uma distância ao contorno final inferior a 220 *pixels*, correspondente a uma aproximação média de cada nodo inferior a 3.7 *pixels*, e considerando a totalidade dos modos de vibração no método de Sobreposição de Modos, são necessárias 8 iterações, Figura 13. Contudo, se apenas se utilizarem 2/3 dos modos de vibração, já são necessárias 10 iterações, Figura 14. Nas figuras apresentadas para esta experiência, as formas intermédias estimadas estão representadas segundo os valores das cargas implícitas.

Esta última experiência, e outras por nós realizadas, permite concluir que, de um modo geral, a consideração de apenas uma parte dos modos de vibração reduz o custo computacional associado ao processo resolutivo, mas obviamente diminui a precisão dos resultados obtidos. No entanto, em muitas aplicações, esta perda de

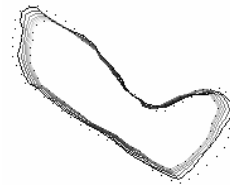
precisão não será significativa e os ganhos computacionais poderão ser relevantes.



**Figura 12:** Contornos G e H emparelhados



**Figura 13:** Formas intermédias estimadas quando são considerados todos os modos de vibração



**Figura 14:** Formas intermédias estimadas quando são considerados apenas 2/3 dos modos de vibração

## 7. Conclusões e Perspectivas de Trabalho Futuro

Neste artigo, foi apresentada uma metodologia que permite estimar a deformação temporal existente entre dois objectos, segundo as propriedades físicas dos mesmos. A referida metodologia, é baseada no Método dos Elementos Finitos, para modelar fisicamente os objectos em causa, no Emparelhamento Modal, para obter correspondências entre os dados que constituem os objectos, e na resolução temporal da Equação Dinâmica de Equilíbrio, para obter as estimativas pretendidas.

No entanto, para ser possível integrar computacionalmente a Equação Dinâmica de Equilíbrio, algumas variáveis têm de ser estimadas. Nomeadamente, os vectores iniciais de deslocamento e de velocidade, assim como o vector de cargas implícitas. As soluções consideradas, nesta abordagem para obter tais estimativas, foram também apresentadas.

Outra solução por nós desenvolvida, está relacionada com o facto de nem todos os nodos dos objectos estarem necessariamente emparelhados. A solução encontrada para estes casos, foi considerar a carga implícita associada a cada nodo não emparelhado pela média ponderada das cargas implícitas que atraem esse nodo para os nodos do objecto final, compreendidos entre os nodos emparelhados correspondentes aos seus vizinhos. Esta solução é baseada no critério de vizinhança, e permite que a metodologia seja adequadamente utilizada e obtenha resultados satisfatórios, mesmo quando os nodos dos objectos não estão todos emparelhados com sucesso.

Nesta abordagem, a quantificação da deformação existente entre dois objectos é conseguida pela



consideração da energia de deformação elástica. Deste modo, em cada instante da resolução temporal da Equação Dinâmica de Equilíbrio, a deformação associada a cada forma intermédia, pode ser quantificada globalmente pelo valor da energia de deformação global, ou então quantificada localmente através da energia de deformação local associada a cada nodo.

Na implementação desenvolvida para a metodologia apresentada, as formas estimadas podem ser representadas em imagens com os seus *pixéis* com valor constante, ou então a traduzir os valores das cargas implícitas ou da energia de deformação elástica.

Na mesma implementação, também foi incluído um procedimento que permite que a metodologia apresentada seja usada para apenas estimar a deformação local existente entre dois objectos. O referido procedimento baseia-se na aplicação, ao primeiro objecto, da transformação rígida estimada a partir dos emparelhamentos obtidos entre os dois objectos em causa. Pela análise dos resultados obtidos quando este procedimento é considerado, é possível verificar que, como seria de esperar, quando se aplica previamente a transformação rígida estimada, o número de iterações necessárias até o equilíbrio ser atingido é significativamente menor, assim como o desfasamento entre as formas intermédias obtidas.

Neste trabalho, a Equação Dinâmica de Equilíbrio foi integrada computacionalmente através do método de Sobreposição de Modos, usado em conjunto com o método de Newmark. Dos resultados experimentais obtidos, verifica-se que quando se considera apenas parte dos modos de vibração na integração, a exactidão dos resultados obtidos é necessariamente afectada, contudo o custo computacional associado é diminuído. Assim, este método de integração pode ser interessante em aplicações que apresentem elevados requisitos de velocidade de execução, e menores exigências ao nível da exactidão das formas estimadas.

Na abordagem apresentada, as cargas implícitas são estimadas usando um valor global de rigidez constante, e a integração da Equação Dinâmica de Equilíbrio é realizada considerando um intervalo de tempo fixo. Estes dois parâmetros poderão ser variáveis ao longo da estimativa temporal. Isto é, à medida que o objecto se vai deformando, estes parâmetros poderão ser afinados no sentido de adequar as estimativas obtidas ao comportamento esperado para o objecto em causa.

A estimativa das cargas implícitas, também é um procedimento que poderá merecer algum trabalho no futuro. Assim, a solução descrita neste artigo poderá ser aperfeiçoada a casos concretos de aplicação, através da procura de modelos alternativos.

Outra tarefa a considerar nos tempos futuros, será a necessária validação da metodologia apresentada em

exemplos reais de aplicação. Por exemplo, no domínio da Computação Gráfica, a abordagem proposta poderá ser utilizada para obter simulações de colisão entre objectos.

## 8. Referências Bibliográficas

1. Sclaroff, S.E., *Modal Matching: A Method for Describing, Comparing, and Manipulating Digital Signals*, in *Massachusetts Institute of Technology*. 1995.
2. Sclaroff, S. and A. Pentland, *Modal Matching for Correspondence and Recognition*, in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1995.
3. Tavares, J.M.R.S., *Análise de Movimento de Corpos Deformáveis usando Visão Computacional*, in *Faculdade de Engenharia*. 2000, Universidade do Porto.
4. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*. 1996: Prentice Hall.
5. Shapiro, L. and J.M. Brady, *Feature-based correspondence: an eigenvector approach*, in *Butterworth-Heinemann Ltd*. 1992.
6. Shapiro, L. and J.M. Brady, *A Modal Approach to Feature-based Correspondence*. 1992, Robotics Research Group, Department of Engineering Science, Oxford University.
7. Nastar, C. and N. Ayache, *Fast Segmentation, Tracking, and Analysis of Deformable Objects*, in *Fourth International Conference on Computer Vision*. 1993. Berlin, Germany.
8. Nastar, C. and N. Ayache, *Fast Segmentation, Tracking, and Analysis of Deformable Objects*. 1994, Institut National de Recherche en Informatique et en Automation: Rocquencourt.
9. Nastar, C., *Modèles Physiques Déformables et Modes Vibratoires pour l'Analyse du Mouvement non-rigide dans les Images Multidimensionnelles*, in *L'École Nationale des Ponts et Chaussées*. 1994.
10. Nastar, C., *Analytical Computation of the Free Vibration Modes: Application to Non Rigid Motion Analysis and Animation in 3D Images*. 1993, Institut National de Recherche en Informatique et en Automation: Rocquencourt.
11. Nastar, C. and N. Ayache, *Frequency-Based Nonrigid Motion Analysis: Application to Four Dimensional Medical Images*, in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1996.
12. Tavares, J.M.R.S., J. Barbosa, and A.J. Padilha. *Matching Image Objects in Dynamic Pedobarography*. in *RecPad'2000 - 11th Portuguese Conference on Pattern Recognition*. 2000. Porto, Portugal.
13. Tavares, J.M.R.S., J. Barbosa, and A.J. Padilha. *Determinação da Correspondência entre Modelos*

- de Contorno e de Superfície, Utilizando Modelização por Elementos Finitos e Análise Modal, em Visão por Computador.* in VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional. 2000. Aveiro, Portugal.
14. Tavares, J.M.R.S., J. Barbosa, and A.J. Padilha. *Determinação da Correspondência entre Objectos utilizando Modelação Física.* in 9º Encontro Português de Computação Gráfica. 2000. Marinha Grande, Portugal.
  15. Tavares, J.M.R.S., J. Barbosa, and A.J. Padilha, *Apresentação de um Banco de Desenvolvimento e Ensaio para Objectos Deformáveis,* in RESI – Revista Electrónica de Sistemas de Informação. 2003.
  16. Pinho, R.R., *Determinação do Campo de Deslocamentos a partir de Imagens de Objectos Deformáveis,* in Faculdades de Engenharia e Ciências. 2003, Universidade do Porto.
  17. Pinho, R.R. and J.M.R.S. Tavares. *Transitional Object's Shape Simulation by Lagrange's Equation and Finite Element Method.* in ASM 2004 - The IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling. 2004. Rhodes, Greece.
  18. Horn, B.K.P., *Closed-form Solution of Absolute Orientation using Unit Quaternions.* Journal of the Optical Society of America A, 1987. **4**: p. 629/642.
  19. Segerlind, L.J., *Applied Finite Element Analysis.* 1984: John Willey & Sons, Inc.
  20. Cook, R., D. Malkus, and M. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.* 1989: Wiley.
  21. Bastos, L.F. and J.M.R.S. Tavares. *Improvement of Modal Matching Image Objects in Dynamic Pedobarography using Optimization Techniques.* in AMDO 2004 - Third International Workshop on Articulated Motion and Deformable Objects. 2004. Palma de Mallorca, Spain: Springer-Verlag LNCS 3179.
  22. Bastos, L.F. and J.M.R.S. Tavares. *Matching of Objects Nodal Points Improvement using Optimization.* in IPDO - Inverse Problems, Design and Optimization Symposium. 2004. Rio de Janeiro, Brazil.